# PART3　Σを用いて和を求める

**例題**

次の数列の初項から第 $n$ 項までの和を求めよ。

(1)　$1^2,\ 3^2,\ 5^2,\ \cdots\cdots$

(2)　$1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ \cdots\cdots$

**Point Pickup**

**練習**

次の数列の初項から第 $n$ 項までの和を求めよ。

⑴　$1\cdot1,\ 2\cdot4,\ 3\cdot7,\ \cdots\cdots$

⑵　$1,\ 1+2,\ 1+2+4,\ \cdots\cdots$

# 第 2 講　PART3 確認問題

次の数列の初項から第 $n$ 項までの和を求めよ。

**1**　$1\cdot1$，$2\cdot3$，$3\cdot5$，$4\cdot7$，……

和　$\dfrac{1}{\boxed{ア}}n\left(n+\boxed{イ}\right)\left(\boxed{ウ}n-\boxed{エ}\right)$

**2**　1，$1+3$，$1+3+9$，$1+3+9+27$，……

和　$\dfrac{1}{\boxed{オ}}\left(\boxed{カ}^{n+1}-\boxed{キ}n-\boxed{ク}\right)$

# PART3　∑を用いて和を求める

**例題**

次の数列の初項から第 $n$ 項までの和を求めよ。

(1)　$1^2$，$3^2$，$5^2$，……

(2)　1，1+2，1+2+3，……

(1)　この数列の第 $k$ 項を $a_k$ とすると，$a_k=(2k-1)^2$ であるから，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}\left(4k^2-4k+1\right)$$

$$=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$=\frac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1)-6(n+1)+3\}=\frac{1}{3}n\left(4n^2-1\right)=\frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)$$

(2)　この数列の第 $k$ 項を $a_k$ とすると，$a_k$ は初項1，公差1，項数 $k$ の等差数列の和であるから

$$a_k=\frac{k}{2}\{2\cdot1+(k-1)\cdot1\}=\frac{1}{2}k(k+1)$$

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k(k+1)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}=\frac{1}{12}n(n+1)(2n+4)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

**練習**

次の数列の初項から第 $n$ 項までの和を求めよ。

(1)　1·1，2·4，3·7，……

(2)　1，1+2，1+2+4，……

(1)　この数列の第 $k$ 項を $a_k$ とすると，$a_k=k(3k-2)$ であるから，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n} k(3k-2)=\sum_{k=1}^{n}\left(3k^2-2k\right)$$

$$=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)\{(2n+1)-2\}=\frac{1}{2}n(n+1)(2n-1)$$

(2)　この数列の第 $k$ 項を $a_k$ とすると，$a_k$ は初項1，公比2，項数 $k$ の等比数列の和であるから

$$a_k=\frac{1\cdot\left(2^k-1\right)}{2-1}=2^k-1$$

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(2^k-1\right)=\frac{2\left(2^n-1\right)}{2-1}-n=2^{n+1}-n-2$$

# 第 2 講　PART3 確認問題 解答

**1** **[正解]** ア：6，イ：1，ウ：4，エ：1

**[解説]**

この数列の第 $k$ 項を $a_k$ とすると，

$a_k=k(2k-1)$ であるから，[A]

求める和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n} k(2k-1)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(2k^2-k\right)$$

$$=2\sum_{k=1}^{n} k^2-\sum_{k=1}^{n} k$$

$$=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)$$

[B]

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)-3\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)}$$

[A]　まず，第 $k$ 項を $k$ を用いた式で表す。

[B]　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

## 2 [正解] オ：4，カ：3，キ：2，ク：3

**[解説]**

この数列の第 $k$ 項を $a_k$ とすると

$$a_k=1+3+3^2+\cdots\cdots+3^{k-1}$$

$a_k$ は初項1，公比3，項数 $k$ の等比数列の和であるから

$$a_k=\frac{1\cdot(3^k-1)}{3-1}=\frac{3^k-1}{2}$$ [C]

[C]　まず，第 $k$ 項を $k$ を用いた式で表す。

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k-1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}3^k-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}$$ [D]

[D]　$\sum_{k=1}^{n}3^k$ は，初項3，公比3，項数 $n$ の等比数列の和である。

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3(3^n-1)}{3-1}-\frac{1}{2}n$$

$$=\frac{1}{4}\{3(3^n-1)-2n\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)}$$